Programme de Colle 29

Chapitre 25 : Fonctions de 2 variables

Définitions

- Parties ouvertes de $\mathbb{R}^2$, fonctions de 2 var.
- Limites , limites et applications partielles
- Continuité, opérations, continuité des projections canoniques

Dérivées partielles

- Dérivée selon un vecteur, propriétés
- Dérivées partielles premières
- Fonction de classe $\mathcal{C}^1$, DL d'ordre 1
- Dérivée selon un vecteur et dérivées partielles, plan tangent
- Différentielle de f

Notion de Gradient

- Définition et propriétés
- interprétation géométrique, application au DL d'ordre 1

Dernières propriétés

- Dérivée d'une composée
- Extremum d'une fonction de deux variables

Chapitre 26 : Espérance et variance

- Espérance : définition, linéarité, variable centrée
- Moment d'une VAR finie, variance, propriétés de calcul de la variance, écart-type, VAR réduite
- Inégalités de Markov et de Bienaymé-Tchebychev
- Théorème de transfert pour l'espérance
- Espérance et variance de lois particulières (uniforme, Bernoulli, binomiale)
- Indépendance et covariance
- Généralisation à n variables

Chapitre 27 : Séries

Définitions et premières propriétés

- Séries, convergence, somme, suite des sommes partielles
- Séries géométriques et série exponentielle
- Développement décimal d'un réel
- Comportement du terme général, reste d'ordre n, espace vectoriel des séries

Séries à termes positifs

- Croissance des sommes partielles positives
- Convergence des séries positives
- Comparaison des séries, Critère de D'Alembert
- Comparaison série-intégrale, séries de Riemann, critère de Riemann

Démonstrations possibles

- Linéarité de l'espérance
- Calcul de la variance
- Inégalité de Markov et Bienaymé-Tchebychev
- Espérance et variance d'une loi binomiale
- Espérance de XY et variance de $X+Y$ pour X et Y indépendantes
- Comparaison des séries

Programme de Colle 30

Chapitre 26 : Espérance et variance

- Espérance : définition, linéarité, variable centrée
- Moment d'une VAR finie, variance, propriétés de calcul de la variance, écart-type, VAR réduite
- Inégalités de Markov et de Bienaymé-Tchebychev
- Théorème de transfert pour l'espérance
- Espérance et variance de lois particulières (uniforme, Bernoulli, binomiale)
- Indépendance et covariance
- Généralisation à n variables

Chapitre 27 : Séries

Définitions et premières propriétés

- Séries, convergence, somme, suite des sommes partielles
- Séries géométriques et série exponentielle
- Développement décimal d'un réel
- Comportement du terme général, reste d'ordre n, espace vectoriel des séries

Séries à termes positifs

- Croissance des sommes partielles positives
- Convergence des séries positives
- Comparaison des séries, Critère de D'Alembert
- Comparaison série-intégrale, séries de Riemann, critère de Riemann

Séries absolument convergentes

- Définition, lien avec la convergence
- Traitement des séries à terme négligeable devant celui d'une série positive convergente.

Théorème des séries alternées

Démonstrations possibles

- Espérance et variance d'une loi binomiale
- Espérance de XY et variance de $X + Y$ pour X et Y indépendantes
- Comparaison des séries
- Séries de Riemann
- Critère de D'Alembert
- Convergence absolue implique convergence

Programme de Colle 31

Révisions Générales

Voici quelques pistes en particulier :

Développements limités

$$\ln(1+sinx) \text{ en 0 à l'ordre3}$$

$$(1-x+x^2)^{1/x} \text{ en 0 à l'ordre2}$$

$$\exp(\sin x/x) \text{ en 0 à l'ordre4}$$

Convergence de suites

- On considère la fonction f définie par

$$f(x)=\sqrt{x^2-x+1}$$

On définit la suite (u_n) par :

$$\begin{cases} u_0 & = & \frac{1}{2} \\ u_{n+1} & = & f(u_n) \quad \text{si } n \geqslant 0 \end{cases}$$

1. Montrer par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \in [\frac{1}{2};1]$
2. Montrer par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \leqslant u_{n+1}$
3. Justifier que la suite (u_n) est convergente et préciser sa limite.

- On considère la fonction f définie par

$$f : x \mapsto \sqrt{2-\ln x}$$

1. Montrer que l'image par f de l'intervalle $[1,e]$ est contenue dans l'intervalle $[1,e]$.
2. Montrer que l'équation $f(x)=x$ admet une solution unique a sur l'intervalle $[1,e]$.
(On pourra étudier la fonction auxiliaire g définie par : $g(x)=x^2+\ln(x)-2$).
3. On considère la suite définie par récurrence pour tout entier naturel n par : $u_0=1$ et $u_{n+1}=f(u_n)$.
   (a) Montrer à l'aide de l'inégalité des accroissements finis que :
   $$|u_{n+1}-a| \leqslant \frac{1}{2}|u_n-a|$$
   (b) Quelle est la limite de la suite (u_n) quand n tend vers $+\infty$?

Calculs de déterminants

- Déterminer si la matrice est inversible en calculant son déterminant :

$$A=\begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ -4 & 5 & -3 \\ -2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

- Calculer en établissant une relation de récurrence d'ordre 2

$$D_n=\begin{vmatrix} 0 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & 0 \end{vmatrix}_{[n]}$$

On pourra commencer par les opérations élémentaires : $C_1 \leftarrow C_1 - C_n$ puis $L_1 \leftarrow L_1 - L_n$. La fin du calcul se fait en utilisant les suites récurrentes linéaires d'ordre 2 !

Espaces vectoriels

- Soit la matrice

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

On considère l'ensemble E des matrices M de $\mathfrak{M}_3(\mathbb{R})$ telles que

$$M=xA+yA^2+zA^3 \text{ avec } (x,y,z)\in\mathbb{R}^3$$

1. Calculer A^2 et A^3 .
2. Etablir que A, A^2 et A^3 sont linéairement indépendantes.
3. Justifier que E est un sous-espace vectoriel de $\mathfrak{M}_3(\mathbb{R})$. En donner une base et la dimension.

- Soit $P\in\mathbb{K}[X]$ un polynôme de degré $n+1$. Montrer que l'ensemble F des multiples de P est un SEV de $\mathbb{K}[X]$ puis que $\mathbb{K}[X]=F\bigoplus\mathbb{K}_n[X]$.

Applications linéaires

- On note E l'espace vectoriel des fonctions polynomiales réelles de degré inférieur ou égal à 3.
  On note e_0, e_1, e_2, e_3 les fonctions définies, pour tout réel x par

  $$e_0(x) = 1$$
  $$e_1(x) = x$$
  $$e_2(x) = x^2$$
  $$e_3(x) = x^3$$

  et on rappelle que $\mathcal{B} = (e_0, e_1, e_2, e_3)$ est une base de E.
  Soit f l'application qui à tout polynôme P de E associe le polynôme $Q = f(P)$, défini par :

  $$\forall x \in \mathbb{R},\ Q(x) = \frac{1}{2}(P(x+1) + P(x))$$

  1. Montrer que f est un endomorphisme de E.
  2. Déterminer $f(e_0)$, $f(e_1)$, $f(e_2)$ et $f(e_3)$ en fonction de e_0, e_1, e_2 et e_3.
  3. Déterminer le noyau et l'image de f.

- On note $B = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
  Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base B est :

  $$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ -4 & 5 & -3 \\ -2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

  1. Soit $u_1 = e_1 + e_2$.
     Calculer les coordonnées de $f(u_1)$ dans la base B.
  2. On considère les éléments de $\mathbb{R}^3$:

     $$u_2 = pe_2 + qe_3$$
     $$u_3 = re_1 + se_3$$

     où p, q, r, s sont des réels.
     Déterminer u_2 et u_3 pour que :

     $$f(u_2) = u_1 + u_2 \quad \text{et} \quad f(u_3) = 2u_2 + u_3$$

  3. Vérifier alors que $B' = (u_1, u_2, u_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
  4. Ecrire la matrice A' de f dans la base B'.
  5. L'endomorphisme f est-il bijectif ?
  6. Calculer A'^{-1}.
  7. En déduire A^{-1}.