

Programme de Colle 21

Chapitre 18 : Probabilités

Ensembles et cardinaux

- Cardinal, cardinal d'une partie d'un ensemble fini
- Cardinal d'une union disjointe, d'une union quelconque, cardinal d'un produit cartésien
- Injection et surjection entre ensembles finis

Espace probabilisé fini

- Vocabulaire des événements, espace probabilisable des événements élémentaires
- Probabilité, propriétés de calcul, crible de Poincaré et inégalité de Boole
- Probabilité conditionnelle, propriétés de calcul, Bayes, probabilités composées, indépendance, indépendance mutuelle
- Système complet d'événements, probabilités totales

Dénombrement

- Equiprobabilité, probabilité uniforme sur les événements élémentaires
- Combinaison, p-liste, arrangement, permutation

Chapitre 19 : Applications linéaires

Définitions

- application linéaire, endo, iso, automorphisme, forme linéaire
- composition, addition, multiplication par un scalaire d'applications linéaires
- image et noyau, injection et surjection

Applications linéaires et bases

- Détermination par l'image d'une base, expression analytique
- injection, surjection, bijection et image d'une base
- utilisation de SEV supplémentaires

Projections, symétries, homothéties

- définition de projection, symétrie, homothétie
- propriétés et caractérisation des projections et symétries

Révisions : Equations différentielles

On pourra poser une résolution simple d'équation différentielle.

Démonstrations possibles

- Cardinal de la réunion disjointe de deux ensemble finis
- P_A est une probabilité
- Probabilités composées et totales
- $\mathcal{L}(E, F)$ est un SEV de $\mathcal{F}(E, F)$.
- Image directe et réciproque de SEV
- Injection, surjection et image d'une base

Programme de Colle 22

Chapitre 19 : Applications linéaires

Définitions

- application linéaire, endo, iso, automorphisme, forme linéaire
- composition, addition, multiplication par un scalaire d'applications linéaires
- image et noyau, injection et surjection

Applications linéaires et bases

- Détermination par l'image d'une base, expression analytique
- injection, surjection, bijection et image d'une base
- utilisation de SEV supplémentaires

Projections, symétries, homothéties

- définition de projection, symétrie, homothétie
- propriétés et caractérisation des projections et symétries

Chapitre 20 : Variables aléatoires

Généralités

- Définition VAR finie, opérations de VAR
- Loi d'une Variable aléatoire, probabilités totales, loi conditionnelle
- VAR $f(X)$, loi
- Lois particulières (uniforme, binomiale)
- Couples de VAR : lois conjointes, marginales, conditionnelles, indépendance

Chapitre 21 : Espaces vectoriels de dimension finie

Dimension

- Espace à générateur fini, Théorème de la base incomplète et conséquences
- Cardinal d'une famille génératrice, dimension d'un espace vectoriel
- Espaces isomorphes
- Dimension d'un SEV, d'un espace produit, d'une somme (Grassmann)
- Nouvelle caractérisation des sev supplémentaires
- Rang d'une famille de vecteurs

Révisions : Suites numériques particulières et fonctions usuelles

On pourra demander le terme général des suites géométriques, arithmétiques, ari-géo, récurrentes linéaires d'ordre 2, la somme de termes consécutifs des suites géo et ari, la somme des k^2 et des k^3 . On pourra étudier les espaces de fonctions et des familles libres de fonctions obtenues par propriétés analytiques de ces fonctions.

Démonstrations possibles

- $\mathcal{L}(E, F)$ est un SEV de $\mathcal{F}(E, F)$.
- Image directe et réciproque de SEV
- Injection, surjection et image d'une base
- Loi d'une VAR $f(X)$
- Pour deux VAR X, Y indépendantes, $P((X \in A) \cap (Y \in B)) = P(X \in A)P(Y \in B)$
- Somme de VAR binomiales indépendantes et de même paramètre

Programme de Colle 23

Chapitre 20 : Variables aléatoires

Généralités

- Définition VAR finie, opérations de VAR
- Loi d'une Variable aléatoire, probabilités totales, loi conditionnelle
- VAR $f(X)$, loi
- Lois particulières (uniforme, binomiale)
- Couples de VAR : lois conjointes, marginales, conditionnelles, indépendance

Chapitre 21 : Espaces vectoriels de dimension finie

Dimension

- Espace à générateur fini, Théorème de la base incomplète et conséquences
- Cardinal d'une famille génératrice, dimension d'un espace vectoriel
- Espaces isomorphes
- Dimension d'un SEV, d'un espace produit, d'une somme (Grassmann)
- Nouvelle caractérisation des sev supplémentaires
- Rang d'une famille de vecteurs

Applications linéaires

- Rang d'une application linéaire, formule du rang

- Invariance du rang par isomorphisme, caractérisation des isomorphismes entre espaces de même dimension
- Hyperplans, caractérisation par supplémentaire de dimension 1 et par noyau de forme linéaire non nulle, équation cartésienne d'hyperplan

Chapitre 22 : Matrices

Calcul matriciel

- Espace vectoriel $\mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K})$,
- Transposition, SEV des matrices symétriques et antisymétriques
- Isomorphisme d'EV $\mathcal{L}(E, F) \rightarrow \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K})$

Matrices inversibles

- Régularité et inversibilité
- Inversibilité d'un produit
- Matrices de passage

Rang et trace d'une matrice

- Définition de rang, invariance par multiplication par une inversible
- Caractérisation du rang, manipulations élémentaires
- Matrices semblables
- Définition de trace, égalité pour des matrices semblables, trace d'un endomorphisme

Révisions : Probabilités de base

Savoir utiliser les formules de probabilités totales, composées mais aussi un dénombrement.

Démonstrations possibles

- Loi d'une VAR $f(X)$
- Pour X, Y indépendantes, $P((X \in A) \cap (Y \in B)) = P(X \in A)P(Y \in B)$
- Somme de VAR binomiales indépendantes

et de même paramètre

- Formule du rang
- Régularité d'un produit
- Caractérisation du rang

Programme de Colle 24

Chapitre 22 : Matrices

Calcul matriciel

- Espace vectoriel $\mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K})$,
- Transposition, SEV des matrices symétriques et antisymétriques
- Isomorphisme d'EV $\mathcal{L}(E, F) \rightarrow \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K})$

Matrices inversibles

- Inversibilité d'un produit
- Matrices de passage

Rang et trace d'une matrice

- Définition de rang
- Caractérisation du rang
- Matrices semblables
- Définition de trace, égalité pour des matrices semblables, trace d'un endomorphisme

Chapitre 23 : Intégration sur un segment

Continuité uniforme

- Définition, lien avec la continuité, théorème de Heine

Fonctions en escalier

- subdivision d'un segment, définition
- définition d'intégrale, propriétés de linéarité, Chasles, croissance

Fonctions continues par morceaux

- Définition, fonction continue par morceaux sur un segment bornée
- Approximation uniforme et encadrement d'une fonction continue sur un segment par des fonctions en escalier
- Intégrale d'une fonction continue par morceaux
- Linéarité, Chasles, Croissance, Cauchy-Schwarz, Minkowski, valeur moyenne, inégalité de la moyenne
- Fonction continue positive d'intégrale nulle et cas d'égalité de Cauchy-Schwarz

Fonction définie par une intégrale

- Théorème de Leibniz, égalité de la moyenne
- Formule de Taylor avec reste intégrale et inégalité de Taylor-Lagrange

Approximation d'une intégrale

- Somme de Riemann, approximation de l'intégrale d'une fonction continue, lipschitzienne

Révisions : Complexes

Il faut pouvoir mener des calculs en utilisant Euler et Moivre, ainsi que les propriétés des racines n-ième de l'unité.

Démonstrations possibles

- Régularité d'un produit
- Caractérisation du rang
- Approximation uniforme d'une fonction continue par des fonctions en escalier
- Inégalité de Cauchy-Schwarz
- Fonction continue positive d'intégrale nulle
- Théorème de Leibniz