

# Programme de Colle 5

## Chapitre 4 : Nombres complexes

### Ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes

- Ecriture algébrique, conjugaison et propriétés, module et propriétés

### L'ensemble $\mathcal{U}$

- Ecriture trigonométrique, définition de l'exponentielle complexe
- Argument d'un produit, relation d'Euler et formule de Moivre
- Transformation de  $\cos(n\theta)$  et  $\sin(n\theta)$ , linéarisation de  $\cos^n(\theta)$  et  $\sin^n(\theta)$
- Calcul de  $\sum_{k=0}^n \cos(kx)$  et  $\sum_{k=0}^n \sin(kx)$ .

### Equations algébriques

- Racine  $n^{\text{ième}}$  d'un complexe non nul, racine  $n^{\text{ième}}$  de l'unité (somme,  $j$ )
- Equation du second degré, relation entre coefficients et solutions

### Géométrie plane

- Angles, traduction du parallélisme, de l'alignement, de l'orthogonalité
- Ecriture  $z \mapsto az + b$  d'une homothétie, rotation et similitude directe

## Chapitre 5 : Fonctions usuelles

### Notions incontournables

- Formule de dérivée d'une composée
- Théorème de bijection continue et dérivabilité de la réciproque

### Logarithmes, exponentielle, puissance

- Définition, premières propriétés et limites du logarithme, de l'exponentielle
- Equation fonctionnelle du logarithme, définition de la fonction puissance

### Fonctions circulaires directes

- Définition et premières propriétés du sinus, cosinus et tangente
- Equations élémentaires, formules d'addition, produits en sommes et sommes en produits

### Fonctions circulaires réciproques

- Définition et premières propriétés
- $\forall x \in [-1, 1], \arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$  et  $\forall x \in \mathbb{R}^*, \arctan x + \arctan \frac{1}{x} = \frac{\pi}{2}$
- Dérivées

## *Démonstrations possibles*

- Inégalité triangulaire pour le module
- Formule de Moivre pour  $n \in \mathbb{N}$
- Calcul de  $\sum_{k=0}^n \cos(kx)$  et  $\sum_{k=0}^n \sin(kx)$ .
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x}$  et  $\lim_{x \rightarrow 0} x \ln(x)$
- $\forall x \in [-1, 1], \arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$  et  $\forall x \in \mathbb{R}^*, \arctan x + \arctan \frac{1}{x} = \frac{\pi}{2}$
- Calcul de la dérivée des fonctions arcsin et arccos

# Programme de Colle 6

## Chapitre 5 : Fonctions usuelles

### Notions incontournables

- Formule de dérivée d'une composée
- Théorème de bijection continue et dérivabilité de la réciproque

### Logarithmes, exponentielle, puissance

- Définition, premières propriétés et limites du logarithme, de l'exponentielle
- Equation fonctionnelle du logarithme, définition de la fonction puissance

### Fonctions circulaires directes

- Définition et premières propriétés du sinus, cosinus et tangente
- Equations élémentaires, formules d'addition, produits en sommes et sommes en produits

### Fonctions circulaires réciproques

- Définition et premières propriétés
- $\forall x \in [-1, 1], \arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$  et  $\forall x \in \mathbb{R}^*, \arctan x + \arctan \frac{1}{x} = \frac{x}{|x|} \frac{\pi}{2}$
- Dérivées et compléments sur les primitives d'inverse de polynômes de degré 1 ou 2

### Fonctions hyperboliques

- Définition et premières propriétés, dérivées (donc primitives)
- $\forall x \in \mathbb{R}, \cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$  et  $1 - \tanh^2 x = \frac{1}{\cosh^2 x}$

### Exponentielle complexe

- Définition et dérivation de l'exponentielle complexe

## Chapitre 6 : Groupes - Anneaux - Corps

### Groupes

- Définition LCI, LCE, qualités usuelles et propriétés élémentaires
- Définition de groupe, sous-groupe, caractérisations, intersection
- Morphisme de groupes, image, noyau, caractérisation d'injectif et surjectif

### Anneaux, corps

- Définition, formule du binôme de Newton et factorisation de  $x^n - y^n$  dans un anneau
- Diviseur de zéro, anneau intègre, intégrité et régularité, groupe des inversibles d'un anneau, morphisme d'anneau
- Définition de corps,  $\mathbb{K} \text{ corps} \Rightarrow \mathbb{K} \text{ anneau intègre}$

## *Démonstrations possibles*

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x}$  et  $\lim_{x \rightarrow 0} x \ln(x)$
- $\forall x \in [-1, 1], \arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$  et  $\forall x \in \mathbb{R}^*, \arctan x + \arctan \frac{1}{x} = \frac{x}{|x|} \frac{\pi}{2}$
- Calcul de la dérivée des fonctions arcsin et arccos
- Unicité du neutre, du symétrique, symétrique de  $x^{-1}$  et de  $x * y$
- Intersection de sous-groupes et la réunion de 2 sous-groupes n'est pas un sous-groupe sauf si l'un est inclus dans l'autre.
- Caractérisation des morphismes injectifs ou surjectifs

# Programme de Colle 7

## Chapitre 6 : Groupes - Anneaux - Corps

### Groupes

- Définition LCI, LCE, qualités usuelles et propriétés élémentaires
- Définition de groupe, sous-groupe, caractérisations, intersection
- Morphisme de groupes, image, noyau, caractérisation d'injectif et surjectif

### Anneaux, corps

- Définition, formule du binôme de Newton et factorisation de  $x^n - y^n$  dans un anneau
- Diviseur de zéro, anneau intègre, intégrité et régularité, groupe des inversibles d'un anneau, morphisme d'anneau
- Définition de corps,  $\mathbb{K}$  corps  $\Rightarrow \mathbb{K}$  anneau intègre

### Calculs dans $\mathbb{C}$

- propriétés de calcul des symboles "somme" et "produit", changement d'indice
- somme des  $k$ ,  $k^2$ ,  $k^3$ ,  $q^k$ , sommes doubles

## Chapitre 7 : Matrices

### Calcul matriciel

- Définition et matrices particulières
- Addition, multiplication externe, produit
- Transposition, propriétés, matrices symétriques et antisymétriques
- Anneau des matrices carrées, puissance, puissance d'une matrice diagonale
- Binôme de Newton et factorisation de  $A^N - B^N$

### Matrices inversibles

- Définition
- Inverse d'un produit,  $GL_n(\mathbb{K})$ , inverse et transposée
- Manipulations élémentaires et calcul pratique de l'inverse
- Applications aux systèmes

## *Démonstrations possibles*

- unicité du neutre, du symétrique, symétrique de  $x^{-1}$  et de  $x * y$
- Intersection de sous-groupes et la réunion de 2 sous-groupes n'est pas un sous-groupe sauf si l'un est inclus dans l'autre.
- Caractérisation des morphismes injectifs ou surjectifs
- Somme des  $k^2$  et  $k^3$ .
- Puissance d'une matrice diagonale
- Groupe linéaire

## Programme de Colle 8

### Chapitre 6 : Groupes - Anneaux - Corps

#### Calculs dans $\mathbb{C}$

- propriétés de calcul des symboles "somme" et "produit", changement d'indice
- somme des  $k, k^2, k^3, q^k$ , sommes doubles

### Chapitre 7 : Matrices

#### Calcul matriciel

- Définition et matrices particulières
- Addition, multiplication externe, produit
- Transposition, propriétés, matrices symétriques et antisymétriques
- Anneau des matrices carrées, puissance, puissance d'une matrice diagonale
- Binôme de Newton et factorisation de  $A^N - B^N$

#### Matrices inversibles

- Définition
- Inverse d'un produit,  $GL_n(\mathbb{K})$ , inverse et transposée
- Manipulations élémentaires et calcul pratique de l'inverse
- Applications aux systèmes

### Chapitre 8 : Les Nombres réels

#### Notion d'ordre

- Définition de relation d'ordre sur un ensemble  $E$
- Définition de majorant, minorant, plus grand et plus petit élément, borne supérieure, et inférieure.

#### Corps des réels

- $\mathbb{R}$  corps commutatif, muni de  $\leq$  ordre total compatible avec l'addition et la multiplication par un réel positif
- premières propriétés de  $\leq$
- Propriétés d'Archimède

#### Approximation dans $\mathbb{R}$

- Congruence : relation d'équivalence, compatibilité avec l'addition
- Partie entière : encadrements

### *Démonstrations possibles*

- Somme des  $k^2$  et  $k^3$ .
- Puissance d'une matrice diagonale
- Groupe linéaire
- Unicité s'il existe du plus grand élément
- Premières propriétés de  $\leq$  dans  $\mathbb{R}$
- Propriétés d'Archimède